УДК 550.311

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗЕМЛИ

О.Д. ВОЕВОДА

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Целью работы является вывод и анализ системы уравнений движения массивного вращающегося деформируемого тела – Земли. Получены согласованные друг с другом уравнения, которые совместно определяют взаимосвязь движений материала Земли, ее орбитального движения и вращения как целого.

EQUATIONS OF EARTH MOTIONS

O.D. VOEVODA

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The paper discussed equations of motion of self-gravitating and rotating non rigid bodies. The Earth is the one of these bodies. The obtained set of equations controls the motion within the Earth, the orbital motion and rotation the Earth as a whole.

Введение

Гравитационное взаимодействие Земли с другими космическими телами реализуется в виде ее наблюдаемых движений. Этими движениями являются: изменение положения центра масс Земли в пространстве, вращение Земли относительно своего центра масс и изменение взаимного положения точек материала Земли. Основные сведения о перечисленных движениях Земли и способах их теоретического описания представлены в книгах [1–14].

Анализ изложенных в литературе фактов показывает, что различные движения Земли в разной степени зависят от локальных особенностей ее строения. Изменение положения центра масс Земли в пространстве и вращение Земли как целого относительно своего центра масс определяются интегральными характеристиками Земли и слабо зависят от локальных особенностей ее строения. Поэтому исследование именно этих движений представляет интерес для геодинамики.

Задача исследования движения центра масс космического тела (Земли) традиционно является предметом небесной механики [1]. Изменение положения центра масс Земли в пространстве сопровождается изменением ориентации вращающейся Земли. Вращение Земли как целого происходит в одном направлении и может систематически влиять на движения ее материала. Это обстоятельство является достаточным основанием для исследования различных движений вращающейся как целое Земли [2,3,5,7,9,10,12,14].

Движения вращающегося тела также рассмотрены в теории систем ориентации и в динамике космических аппаратов [15–17].

Вращение Земли исследовано в рамках двух моделей ее материала. Первая модель соответствует недеформируемому телу [18–26], вторая соответствует деформируемому телу [27–41].

Закономерности вращения недеформируемой Земли относительно своего центра масс определяются уравнением Эйлера [12,18]. Это уравнение связывает изменение во времени вектора угловой скорости вращения Земли с ее тензором инерции и суммарным моментом внешних гравитационных сил относительно центра масс Земли. В системе трех уравнений Эйлера неизвестными величинами являются три компоненты вектора угловой скорости вращения Земли и шесть компонент ее тензора инерции. Это значит, что система трех уравнений Эйлера не является полной. Поэтому в задачах геодинамики тензор инерции Земли считается заданным. Данные о тензоре инерции Земли, т.е. о ее фигуре и модели внутреннего строения, получены методами гравиметрии, геодезии и сейсмологии. Система понятий этих методов содержит элементы, которые являются внешними по отношению к модели Земли как недеформируемого тела. Это ограничивает возможности логически непротиворечивого использования уравнения Эйлера в геодинамике.

Следует отметить работы Х. Киношита с соавторами [22–26]. В них исследованы закономерности вращения эллипсоидальной недеформируемой Земли в гравитационном поле двух материальных точек – Солнца и Луны. Результаты этих работ с поразительной точностью соответствуют данным наблюдений.

Закономерности вращения деформируемой Земли как целого относительно своего центра масс определяются уравнением Лиувилля [12]. Оно связывает изменение во времени вектора угловой скорости вращения и тензора инерции деформируемой Земли с суммарным моментом внешних гравитационных сил относительно центра масс Земли. Уравнение Лиувилля в принципе позволяет оценить влияние способности материала Земли деформироваться на ее движение как целого. В системе трех уравнений Лиувилля неизвестными величинами являются три компоненты собственно момента импульса материала Земли, три компоненты вектора угловой скорости вращения Земли и шесть компонент ее тензора инерции. Это значит, что система трех уравнений Лиувилля не является полной. Поэтому, как и в случае недеформируемой Земли, тензор инерции Земли и его изменения во времени считаются заданными. Тензор инерции различен для различных моделей строения Земли, а его изменения во времени могут быть как быстрыми, так и медленными. Различные локальные движения материала Земли могут вызвать одинаковые изменения во времени как тензора инерции Земли, так и угловой скорости ее вращения. Поэтому анализ только уравнения Лиувилля не позволяет установить – какие из заданных движений материала Земли реализуются в реальности.

Таким образом, естественно возникает задача согласования движения Земли как целого с локальными движениями ее материала. Необходимость решения такой задачи была отмечена М.С. Молоденским [10]. Поэтому во многих работах по геодинамике совместно с уравнением Лиувилля используется уравнение Навье (или его модификации), которое определяет локальные движения материала деформируемой Земли [2,8,13]. Современный уровень развития этой области геодинамики представлен в работах Х. Гетино и Х. Феррандиса [33–37], С.М. Молоденского, Т. Сосао и Е. Гроте [38–41].

Использование уравнения Навье предполагает определение так называемое отсчетного (начального) состояния деформируемого тела. Это состояние должно быть одинаковым в задачах совместного описания локальных движений материала Земли и ее орбитального и вращательного движений. Однако до настоящего времени отсутствует устоявшаяся точка зрения на вопрос о рациональном выборе отсчетного состояния Земли.

Анализ изложенных в литературе фактов и попыток их разнообразной интерпретации приводит к устойчивому впечатлению, что описание взаимосвязи различных движений Земли необходимо рассматривать только в рамках системы согласованных друг с другом уравнений движения массивного вращающегося деформируемого тела – Земли. Однако задача построения и анализа такой системы уравнений последовательно не рассмотрена ни в одной из известных автору работ по геодинамике.

Найти систему уравнений движения Земли как целого можно с помощью метода моментов. В 1939 году этот метод был применен В.А. Фоком для описания движения вращающихся газовых или жидких масс

[42]. В этой работе получена полная система уравнений так называемого твердотельного движения массивных вращающихся газовых или жидких тел конечных размеров. Найденная В.А. Фоком система уравнений полностью определяет взаимную связь орбитального и вращательного движений Земли в рамках модели недеформируемого тела.

Попытка применения метода моментов для вывода системы согласованных друг с другом уравнений движения массивной вращающейся деформируемой Земли была предпринята в работе автора [43]. В настоящей работе эта попытка реализована последовательно и полно.

Основные понятия

Пусть в пространстве имеется фиксированная совокупность N деформируемых тел с постоянной массой $M_n (n = 1, 2, ...N)$. Эти тела взаимодействуют между собой в соответствии с законом тяготения (см. рисунок).

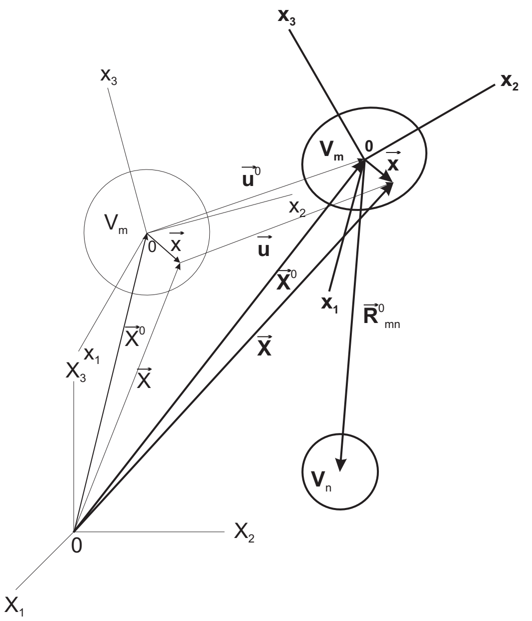

Рис. Система тел и системы координат

Пусть $\{0, \vec{X}\}$ есть инерциальная система координат, начало которой помещено в некоторую точку пространства. Назовем мгновенным то состояние деформируемого тела, которое реализуется в момент времени t. Пусть $\{\mathbf{o}_n, \vec{\mathbf{x}}_n\}$ есть неинерциальная система координат, начало которой совпадает с мгновенным центром масс деформируемого тела с номером n. Система $\{\mathbf{o}_n, \vec{\mathbf{x}}_n\}$ вращается вместе с деформируемым телом. Пусть $\{o_n, \vec{x}_n\}$ есть неинерциальная система координат. Начало этой системы координат совпадает с центром масс тела с номером n, которое находится в некотором отсчетном состоянии. Для краткости это состояние назовем отсчетным телом. Система $\{o_n, \vec{x}_n\}$ вращается вместе с отсчетным телом.

Отсчетное состояние тела может быть как физически реализуемым, так и гипотетическим [44–46]. Для описания движения точек деформируемого тела обычно используют два способа – Лагранжа и Эйлера [44–46]. В настоящей работе используется отсчетная модификация способа Лагранжа [45].

В системе координат $\{0, \vec{X}\}$ мгновенные положения центров масс и любых других точек деформируемого и отсчетного тел, соответственно, определяются векторами $\vec{\mathbf{X}}^0(t)$, $\vec{X}^0(t)$ и $\vec{\mathbf{X}}(t)$, $\vec{X}(t)$. Векторы

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}^0, \qquad \vec{x} = \vec{X} - \vec{X}^0 \tag{1}$$

определяют, соответственно, положения точек деформируемого или отсчетного тела относительно своего центра масс (см. рисунок).

(Величины и операции над ними в мгновенном и отсчетном состоянии тела обозначены, соответственно, жирным и тонким шрифтом.)

По определению, вектор перемещения $\vec{\mathbf{U}}$ произвольной точки деформируемого тела относительно системы координат $\{0, \vec{X}\}$ равен [44]:

$$\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{X}} - \vec{X} = \vec{\mathbf{U}}^0 + \vec{\mathbf{u}}. \tag{2}$$

В формуле (2)

$$\vec{\mathbf{U}}^0 = \vec{\mathbf{X}}^0 - \vec{X}^0 \tag{3}$$

есть вектор перемещения центра масс деформируемого тела относительно его положения в отсчетном состоянии (см. рисунок); вектор

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{U}}^0 = \vec{\mathbf{x}} - \vec{x} \tag{4}$$

есть перемещение произвольной точки тела относительно системы координат $\{o_n, \vec{x}_n\}$, которая связана с отсчетным телом (см. рисунок).

Пусть масса отсчетного тела равна массе реального деформируемого тела. Пусть отсчетное состояние тела соответствует гипотетической модели тела из недеформируемого материала. Целесообразность выбора именно такого отсчетного состояния будет ясна из дальнейшего изложения.

В системе координат $\{o_n, \vec{x}_n\}$ вектор положения $\vec{x}$ любой точки отсчетного тела относительно его центра масс не зависит от времени:

$$d\vec{x}/dt = 0. \tag{5}$$

Производная d/dt определена в неинерциальной системе координат $\{o_n, \vec{x}_n\}$.

В деформируемом теле мгновенный вектор поворота точки тела $\vec{\mathbf{\Phi}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$ относительно мгновенной оси вращения зависит от положения этой точки в теле. Пусть $< \vec{\mathbf{\Phi}} >_{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{\Phi}} d\mathbf{V}$ есть средний по объему тела вектор поворота. Символом $< >_{\mathbf{V}}$ обозначены средние по объему тела величины. Мгновенная угловая скорость вращения деформируемого тела как целого относительно своего центра масс есть [47]:

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} < \vec{\mathbf{\Phi}} >_{\mathbf{V}} . \tag{6}$$

Производная $\mathbf{d/dt}$ определена в неинерциальной системе координат $\{\mathbf{o}_n, \vec{\mathbf{x}}_n\}$.

В отсчетном теле мгновенный вектор поворота точки тела $\vec{\Phi}(t)$ относительно мгновенной оси вращения не зависит от положения этой точки в теле. Мгновенная угловая скорость вращения отсчетного тела относительно своего центра масс есть

$$\vec{\Omega} = d\vec{\Phi}/dt. \tag{7}$$

Производная d/dt определена в неинерциальной системе координат $\{o_n, \vec{x}_n\}$.

Пусть векторы $\vec{\mathbf{\Omega}}$ и $\vec{\Omega}$ определены относительно системы координат $\{0, \vec{X}\}$. Вектор

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{\Omega}} - \vec{\Omega} \tag{8}$$

есть та часть (возмущение) вектора угловой скорости вращения тела как целого, которая обусловлена способностью материала тела деформироваться.

Из формул (6)–(8) следует, что $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\vec{\mathbf{x}}, t) = \vec{\mathbf{\Phi}}(\vec{\mathbf{x}}, t) - \vec{\Phi}(t)$ есть та часть (возмущение) мгновенного вектора поворота точки тела, которая обусловлена способностью материала тела деформироваться. Обозначим $< \vec{\boldsymbol{\varphi}} >_{\mathbf{V}} = \frac{1}{\mathbf{V}} \int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\boldsymbol{\varphi}} d\mathbf{V}$ ту часть (возмущение) вектора поворота тела как целого, которая обусловлена способностью материала тела деформироваться. Тогда в системе координат $\{\mathbf{o}_n, \vec{\mathbf{x}}_n\}$

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} < \vec{\boldsymbol{\varphi}} >_{\mathbf{V}} . \tag{9}$$

Вектор локального поворота элементарного объема тела равен [44]:

$$\vec{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{u}}, \tag{10}$$

где $\mathbf{\nabla}\times = \mathbf{rot}$. Из (9) и (10) получим:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\left(\frac{1}{\mathbf{V}}\int\limits_{\mathbf{V}} \mathbf{\nabla}\times\vec{\mathbf{u}}d\mathbf{V}\right). \tag{11}$$

Из последней формулы следует, что возмущение угловой скорости вращения тела непосредственно вызывается только динамическим процессом деформирования материала тела.

По определению, масса M тела и вектор $\vec{\mathbf{X}}^0$ положения его центра масс равны, соответственно, [47]:

$$M = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho} d\mathbf{V}, \tag{12}$$

$$\vec{\mathbf{X}}^0 = \frac{1}{M}\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{X}}d\mathbf{V}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\rho}(\vec{\mathbf{x}}, t)$ – плотность материала деформируемого тела объемом $\mathbf{V}(t)$. Из формулы (13) следует тождество

$$\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}(\vec{\mathbf{X}} - \vec{\mathbf{X}}^0)d\mathbf{V} \equiv 0. \tag{14}$$

Назовем симметричный мультипликативный тензор второго ранга

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{M}\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}}d\mathbf{V} \tag{15}$$

тензором инерции тела. Часто этот тензор называют интегралом инерции тела. Обычно используется следующее определение тензора инерции [47]:

$$\hat{\mathbf{J}} = \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}(|\vec{\mathbf{x}}|^2\hat{1} - \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}})\, d\mathbf{V}, \tag{16}$$

где $\hat{1}$ – единичный тензор Кронекера. Поскольку $\hat{\mathbf{I}}$ и $\hat{\mathbf{J}}$ связаны между собой:

$$\hat{\mathbf{I}} = \frac{1}{M}(\mathbf{J}\hat{1} - \hat{\mathbf{J}}), \quad \hat{\mathbf{J}} = M(\mathbf{I}\hat{1} - \hat{\mathbf{I}}), \tag{17}$$

то оба этих тензора будем называть тензорами инерции тела. В формулах (17) $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ есть первые инварианты соответствующих тензоров.

Основное уравнение

Деформируемое тело с номером m будем считать Землей. В инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$ движение точки (элементарного объема) этого тела определяется уравнением [44]:

$$\boldsymbol{\rho}_m \frac{d^2\vec{\mathbf{X}}_m}{dt_X^2} = \boldsymbol{\nabla} \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{\mathbf{f}}_{mm} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{f}}_{mn}. \tag{18}$$

В нелинейном уравнении (18): $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$ есть симметричный тензор (второго ранга) напряжений, символ $\bullet$ означает операцию скалярного произведения $\boldsymbol{\nabla}\bullet = \mathbf{div}$. Левая часть уравнения (18) есть полная сила инерции элементарного объема тела, правая его часть есть сумма поверхностных $\boldsymbol{\nabla} \bullet \widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ и объемных $\vec{\mathbf{f}}_{mm}$, $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ сил.

Объемные силы равны [11]:

$$\vec{\mathbf{f}}_{mm} = G\boldsymbol{\rho}_m \int\limits_{\mathbf{V}'_m} \boldsymbol{\rho}' \frac{\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|^3}\, d\mathbf{V}, \tag{19}$$

$$\vec{\mathbf{f}}_{mn} = G\boldsymbol{\rho}_m \int\limits_{\mathbf{V}_n} \boldsymbol{\rho} \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\, d\mathbf{V}. \tag{20}$$

В формулах (19) и (20): G – гравитационная постоянная, $|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|$ – расстояние между различными точками одного тела, $|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|$ – расстояние между точками различных тел. Вектор $\vec{\mathbf{f}}_{mm}$ есть сила гравитационного притяжения между точкой $\vec{\mathbf{x}}_m$ и всеми другими точками $\vec{\mathbf{x}}'_m$ этого же тела. Вектор $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ есть сила гравитационного притяжения между точкой $\vec{\mathbf{X}}_m \in \mathbf{V}_m$ и любым другим телом $\mathbf{V}_n$. Силы $\vec{\mathbf{f}}_{mm}$ и $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$, соответственно, есть внутренняя и внешняя объемные силы.

Уравнение (18) определяет движение произвольного элементарного объема деформируемого тела относительно инерциальной системы координат $\{0, \vec{X}\}$. Часто это движение удобно рассматривать в неинерциальной системе координат $\{\mathbf{o}_m, \vec{\mathbf{x}}_m\}$, которая вращается вместе с телом. Для этого необходимо знать связь производных по времени соответствующих функций в системах координат $\{0, \vec{X}\}$ и $\{\mathbf{o}_m, \vec{\mathbf{x}}_m\}$.

Пусть $\mathbf{Q}$ есть векторная или тензорная функция мгновенного состояния тела (или его части). Физический смысл этой функции определяется содержанием конкретного процесса.

Пусть за бесконечно-малый интервал времени происходят бесконечно малые изменения положения и ориентации деформируемого тела в пространстве. Этим изменениям соответствуют бесконечно малые изменения взаимного положения и ориентации систем координат $\{\mathbf{o}_m, \vec{\mathbf{x}}_m\}$ и $\{0, \vec{X}\}$. В этих системах координат производные по времени функции $\mathbf{Q}$ связаны следующими формулами [47]:

$$\frac{d\vec{\mathbf{Q}}}{dt_X} - \frac{d\vec{\mathbf{Q}}^0}{dt_X} = \frac{\mathbf{dQ}}{\mathbf{d}t} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{Q}, \tag{21}$$

$$\frac{d^2\mathbf{Q}}{dt_X^2} - \frac{d^2\mathbf{Q}^0}{dt_X^2} = \frac{\mathbf{d}^2\mathbf{Q}}{\mathbf{d}t^2} + 2\vec{\mathbf{\Omega}} \times \frac{\mathbf{dQ}}{\mathbf{d}t} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{Q}) + \frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt_X} \times \mathbf{Q}. \tag{22}$$

Символ $\times$ означает векторное умножение, а $\mathbf{Q}^0$ есть значение функции $\mathbf{Q}$ в центре масс тела. Производные по времени d/dt_X и $\mathbf{d}/\mathbf{d}t$ определены, соответственно, в системах координат $\{0, \vec{X}\}$ и $\{\mathbf{o}_n, \vec{\mathbf{x}}_n\}$.

Если $\mathbf{Q} = \vec{\mathbf{X}}$, то смысл формул (21), (22) очевиден [47].

Если $\mathbf{Q} = \vec{\mathbf{\Omega}}$, то из формулы (21) следует:

$$d\vec{\mathbf{\Omega}}/dt_X = \mathbf{d}\vec{\mathbf{\Omega}}/\mathbf{d}t. \tag{23}$$

Угловая скорость $\vec{\mathbf{\Omega}}$ вращения тела как целого есть единственный вектор, который удовлетворяет равенству (23).

Предположения

Пусть мгновенная конфигурация каждого из тел мало отличается от шара. Это предположение следует из наблюдений фигур Солнца и планет.

Поскольку количество взаимодействующих тел и масса каждого из них не изменяются, то тела должны быть достаточно удалены друг от друга:

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} < 1, \quad \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{R}^2} \ll 1, \tag{24}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ есть, соответственно, максимальный размер тела и минимальное расстояние между телами. Неравенства (24) приблизительно соответствуют пределу Роша и исключают возможность слияния или распада взаимодействующих тел [48].

Будем считать, что поверхность $\mathbf{S}$ каждого из тел является гладкой, а вектор напряжений на ней равен нулю:

$$\hat{\sigma} \bullet \vec{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \mathbf{S}, \tag{25}$$

где $\vec{\mathbf{n}}$ – вектор единичной нормали к $\mathbf{S}$. Положительным считается направление внешней к $\mathbf{S}$ нормали (см. рисунок). Условие (25) исключает действие океана и атмосферы на твердую поверхность Земли и упрощает описание ее движений.

Пусть в материале каждого из тел реализуются малые перемещения и малые компоненты тензора дисторсий $\boldsymbol{\nabla}\vec{\mathbf{u}}$, где $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{grad}$. Пусть изменение перемещений в единицу времени $\mathbf{d}\vec{\mathbf{u}}/\mathbf{d}t$ меньше максимальной скорости w_0 распространения возмущений в материале тела. Введем малые параметры:

$$\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{r}} \ll 1, \quad |\boldsymbol{\nabla}\vec{\mathbf{u}}| \ll 1, \quad \frac{1}{w_0}\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{d}t} < 1. \tag{26}$$

где $\mathbf{u} = |\vec{\mathbf{u}}|$ – максимальное значение абсолютной величины вектора перемещений, $|\boldsymbol{\nabla}\vec{\mathbf{u}}|$ – максимальное значение абсолютной величины градиента перемещений.

Первое из неравенств (26) соответствует наблюдаемым движениям материала Земли. Второе из неравенств (26) может не выполняться во всех точках материала Земли, однако его наличие необходимо для вывода линейных уравнений движения Земли. Третье из неравенств (26) показывает, что изменение перемещений в единицу времени не может быть больше скорости сейсмических волн.

Если выполненяется второе из неравенств (26), то естественно принять линейно упругую модель материала тела [44]:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{c}} \bullet \bullet \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{27}$$

где $\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{c}}(\vec{x})$ – симметричный тензор (четвертого ранга) коэффициентов жесткости материала тела. Симметричная часть тензора дисторсий

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}\nabla) \tag{28}$$

есть тензор (второго ранга) малых деформаций. Формулы (27) и (28) устанавливают линейную связь тензора напряжений с пространственной производной вектора перемещений.

Если совместно выполняются первое и второе из неравенств (26), то практически совпадают производные функций по координатам мгновенного и отсчетного состояний тела $\boldsymbol{\nabla} \approx \nabla$ [45,46]. Если совместно выполняются второе и третье из неравенств (26), то практически совпадают материальная и локальная производные функций по времени $\mathbf{d}/\mathbf{d}t \approx \partial/\partial t$ [45,46]. Если выполняется второе неравенство (26), то $\boldsymbol{\rho} \approx \rho(\vec{x})$, а $\mathbf{V} \approx V$ [45,46].

При выполнении второго и третьего из неравенств (26) возмущение $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ (12) вектора угловой скорости вращения тела равно:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\frac{1}{V}\int\limits_V \nabla \times \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t}\, dV. \tag{29}$$

Подставим $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$ (4) в формулы (15) и (16). В линейном по $\vec{\mathbf{u}}$ приближении для тензоров инерции $\hat{\mathbf{I}}$ и $\hat{\mathbf{J}}$ (15) и (16) получим:

$$\hat{\mathbf{I}} = \hat{I} + \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{J}} = \hat{J} + \hat{\mathbf{j}}. \tag{30}$$

В формулах (30)

$$\hat{I} = \frac{1}{M}\int\limits_V \rho\vec{x}\vec{x}\, dV \quad \text{и} \quad \hat{J} = \int\limits_V \rho(|\vec{x}|^2\hat{1} - \vec{x}\vec{x})\, dV \tag{31}$$

есть тензоры инерции отсчетного тела, а

$$\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{M}\int\limits_V \rho(\vec{x}\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}\vec{x})dV \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{j}} = \int\limits_V \rho(2(\vec{x} \bullet \vec{\mathbf{u}})\hat{1} - (\vec{x}\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}}\vec{x}))\, dV \tag{32}$$

есть те части (возмущения) тензоров инерции, которые обусловлены спобностью материала тела деформироваться. Возмущения $\hat{\mathbf{i}}$ и $\hat{\mathbf{j}}$ тензоров инерции тела связаны между собой теми же формулами (17), что и сами тензоры инерции:

$$\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{M}(\mathbf{j}\hat{1} - \hat{\mathbf{j}}) \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{j}} = M(\mathbf{i}\hat{1} - \hat{\mathbf{i}}). \tag{33}$$

Уравнения баланса полного импульса и полного момента импульса деформируемого тела

Применим метод моментов к уравнению (18) изменения во времени импульса элементарного объема тела с номером m.

Найдем уравнение баланса полного импульса тела. Проинтегрируем уравнение (18) по объему $\mathbf{V}_m$ тела и примем во внимание формулы (12), (13) и формулу

$$\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\frac{d^\alpha \mathbf{Q}}{dt_X^\alpha}d\mathbf{V} = \frac{d^\alpha}{dt_X^\alpha}\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\rho}\mathbf{Q}d\mathbf{V}, \tag{34}$$

которая в лагранжевом описании справедлива для тела постоянной массы [43,44]. В формуле (34) $\mathbf{Q}(\vec{\mathbf{x}}, t)$ есть некоторая функция мгновенного состояния тела, а α есть порядок производной. В результате получим:

$$M_m\frac{d^2\vec{\mathbf{X}}_m^0}{dt_X^2} = \int\limits_{\mathbf{V}_m} \boldsymbol{\nabla} \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\mathbf{V} + \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mm}d\mathbf{V} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mn}d\mathbf{V}. \tag{35}$$

Интеграл $\int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\nabla} \bullet \hat{\sigma} d\mathbf{V} = \int\limits_{\mathbf{S}} \hat{\sigma} \bullet \vec{\mathbf{n}} d\mathbf{S} = 0$ в силу условия (25) на поверхности тела. Интеграл $\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mm} d\mathbf{V} = 0$ как главный вектор сил гравитационного притяжения между внутренними точками тела.

Сделанные преобразования позволяют получить уравнение движения центра масс тела

$$M_m \frac{d^2 \vec{\mathbf{X}}_m^0}{dt_X^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{mn}, \tag{36}$$

в правой части которого сумма сил

$$\vec{\mathbf{F}}_{mn} = \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{f}}_{mn} d\mathbf{V} \tag{37}$$

есть главный вектор внешних гравитационных сил, действующих на тело.

Найдем силы $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ и $\vec{\mathbf{F}}_{mn}$ в случае удаленных друг от друга шарообразных тел.

Поскольку мгновенная конфигурация тел мало отличается от шарообразной, то вектор $(\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n)/|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3$ мало изменяется на расстоянии порядка размера $\mathbf{r}$ тела вдоль любого из направлений в теле. Поэтому этот вектор можно представить в виде ряда по степеням малого параметра $\mathbf{r}/\mathbf{R}$.

Разложим вектор $(\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n)/|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3$ в ряд Тэйлора около положения $\vec{\mathbf{X}}_m^0$ центра масс тела $\mathbf{V}_m$ и ограничимся слагаемыми, величины которых не меньше $\mathbf{x}^2/\mathbf{R}^2$. Каждое из этих слагаемых также разложим в ряд Тэйлора около положений $\vec{\mathbf{X}}_n^0$ центров масс тел $\mathbf{V}_n$ и ограничимся слагаемыми, величины которых не меньше $\mathbf{x}^2/\mathbf{R}^2$. В результате с погрешностью $o\left(\mathbf{x}^3/\mathbf{R}^3\right)$ получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3} \approx \frac{\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0}{|\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0|^3} &+ \left(\boldsymbol{\nabla}_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_m^0} \bullet \vec{\mathbf{x}}_m \; + \\
&+ \left(\boldsymbol{\nabla}_n \frac{\vec{\mathbf{X}}_m^0 - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m^0 - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_n^0} \bullet \vec{\mathbf{x}}_n \; + \\
&+ \left(\boldsymbol{\nabla}_n \left(\boldsymbol{\nabla}_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_m^0}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_n^0} \bullet \bullet \; \vec{\mathbf{x}_m} \vec{\mathbf{x}_n} \; + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_m \boldsymbol{\nabla}_m \frac{\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0}{|\vec{\mathbf{X}}_m - \vec{\mathbf{X}}_n^0|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_m^0} \bullet \bullet \; \vec{\mathbf{x}_m} \vec{\mathbf{x}_m} \; +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_n\frac{\vec{\mathbf{X}}_m^0-\vec{\mathbf{X}}_n}{|\vec{\mathbf{X}}_m^0-\vec{\mathbf{X}}_n|^3}\right)\Bigg|_{\vec{\mathbf{X}}_n^0}\bullet\bullet\,\vec{\mathbf{x}_n}\vec{\mathbf{x}_n}. \tag{38}$$

В формуле (38) $\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0=\vec{\mathbf{X}}_m^0-\vec{\mathbf{X}}_n^0$ есть вектор взаимного положения центров масс деформируемых тел. Индекс около оператора $\boldsymbol{\nabla}$ указывает – по координатам какого из тел действует этот оператор.

Подставим (38) в (20) и примем во внимание формулы (12)–(15). После вычислений с погрешностью $o\,(\mathbf{r}^3/\mathbf{R}^3)$ получим формулу для силы $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$, в которой оценим порядок некоторых величин. В линейном по $\mathbf{u}$ приближении $\vec{\mathbf{R}}^0\sim\vec{R}^0(1+\mathbf{u}/R)$. Поскольку $\mathbf{u}/R^0\ll\mathbf{u}/\mathbf{r}$, то с очень малой погрешностью (практически точно) можно считать, что $\vec{\mathbf{R}}_{mn}^0=\vec{R}_{mn}^0$. Так как $\mathbf{u}/\mathbf{r}\ll 1$, а $\mathbf{u}/R\ll\mathbf{r}/R$ и $\mathbf{u}/R\ll\mathbf{u}/\mathbf{r}$, то с очень малой погрешностью (практически точно) можно считать что, $\mathbf{i}_n/|\vec{R}_{mn}^0|^2\ll I_n/|\vec{R}_{mn}^0|^2$ $(n\neq m)$.

С учетом этих оценок с погрешностью $o\,(\mathbf{r}^3/R^3)$ получим:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{f}}_{mn}=G\boldsymbol{\rho}_m\Bigg(&\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^3}M_n+\vec{\mathbf{x}}_m\frac{1}{|\vec{R}_{mn}^0|^3}M_n-\\
&-3\vec{\mathbf{x}}_m\bullet\frac{\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}M_n-\frac{3}{2}(\vec{\mathbf{x}}_m\bullet\vec{\mathbf{x}}_m)\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}M_n-\\
&-3\vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_m\bullet\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}M_n+\frac{15}{2}\vec{\mathbf{x}}_m\vec{\mathbf{x}}_m\bullet\bullet\frac{\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7}M_n-\\
&-\frac{3}{2}\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}I_nM_n-3\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}\bullet\hat{I}_nM_n+\frac{15}{2}\frac{\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7}\bullet\bullet\hat{I}_nM_n\Bigg).
\end{aligned} \tag{39}$$

Подставим (39) в (37) и примем во внимание формулы (12) – (15). В результате получим:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{F}}_{mn}=G\Bigg(&M_m\Bigg(\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^3}M_n-\frac{3}{2}\mathbf{I}_m\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}M_n-\\
&-3\,\hat{\mathbf{I}}_m\bullet\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}M_n+\frac{15}{2}\hat{\mathbf{I}}_m\bullet\bullet\frac{\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7}M_n\Bigg)-\\
&-M_m\Bigg(\frac{3}{2}\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}I_nM_n+3\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5}\bullet\hat{I}_nM_n-\\
&-\frac{15}{2}\frac{\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7}\bullet\bullet\hat{I}_nM_n\Bigg)\Bigg).
\end{aligned} \tag{40}$$

В формулах (39) и (40) $\mathbf{I}$ и I есть первые инварианты соответствующих тензоров инерции.

Поскольку тензор инерции $\mathbf{I} \sim \mathbf{r}^2$, то с погрешностью $o\left(\mathbf{r}^3/R^3\right)$ формулы (39), (40) представляют внешние гравитационные силы $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ и $\vec{\mathbf{F}}_{mn}$ в виде рядов по степеням малого параметра $\mathbf{r}/R$. Формулы (39), (40) содержат слагаемые, которые зависят от тензоров инерции тел. Эти слагаемые определяют ту часть сил гравитационого взаимодействия между деформируемыми телами, которая обусловлена конечными размерами тел и их внутренней структурой.

Уравнение (36) определяет орбитальное движение деформируемого тела с номером m под действием сил (40). В рамках принятых предположений это движение практически не зависит от перемещений материала каждого из удаленных тел с номерами $n \neq m$.

Найдем уравнение баланса полного момента импульса тела. Умножим $\vec{\mathbf{X}}_m$ векторно на обе части уравнения (18), получившееся уравнение проинтегрируем по объему $\mathbf{V}_m$ тела. В результате получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}} \times \boldsymbol{\rho}\frac{d\vec{\mathbf{W}}}{dt_X}d\mathbf{V} \; &= \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}} \times (\boldsymbol{\nabla} \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}})d\mathbf{V} + \\ + \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{f}}_{mn}\, d\mathbf{V} \; &+ \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}}_m \times \vec{\mathbf{f}}_{mn}\, d\mathbf{V},\end{aligned} \tag{41}$$

где $\vec{\mathbf{W}} = d\vec{\mathbf{X}}/dt_X$.

Преобразуем левую часть уравнения (41). Подинтегральное выражение в этой части уравнения (41) равно $\vec{\mathbf{X}} \times d\vec{\mathbf{W}}/dt_X = d(\vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{W}})/dt_X$. Поэтому, приняв во внимание формулу (34), получим:

$$\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}} \times \boldsymbol{\rho}\frac{d\vec{\mathbf{W}}}{dt_X}d\mathbf{V} = \frac{d}{dt_X}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}} \times \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{W}}\, d\mathbf{V}. \tag{42}$$

Из формулы (42) следует, что левая часть уравнения (41) есть изменение в единицу времени вектора полного момента импульса $\vec{\mathbf{L}}$ деформируемого тела

$$\vec{\mathbf{L}}_m = \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}} \times \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{W}}d\mathbf{V}. \tag{43}$$

Преобразуем правую часть уравнения (41). Поскольку $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}^0 + \vec{\mathbf{x}}$ (1), то первый интеграл в правой части уравнения (41) можно представить в виде:

$$\int\limits_{\mathbf{V}} \vec{\mathbf{X}} \times (\boldsymbol{\nabla} \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}})d\mathbf{V} = \vec{\mathbf{X}}^0 \times \int\limits_{\mathbf{S}} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \vec{\mathbf{n}}\, d\mathbf{S} + \int\limits_{\mathbf{S}} \vec{\mathbf{x}} \times (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \bullet \vec{\mathbf{n}})d\mathbf{S} - \int\limits_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}}\, d\mathbf{V}.$$

Так как поверхность тела незагружена (25), то в правой части последней формулы первые два интеграла равны нулю; поскольку тензор напряжений симметричен, то равен нулю третий интеграл в правой части той же формулы. Таким образом, в правой части уравнения (41): первый интеграл равен нулю; второй интеграл равен нулю как главный вектор сил гравитационного притяжения между внутренними точками тела; третий интеграл есть суммарный вектор момента внешних гравитационных сил:

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{f}}_{mn} d\mathbf{V} = \vec{\mathbf{M}}_m. \tag{44}$$

Из формул (42)–(44) следует уравнение изменения во времени (баланса) вектора полного момента импульса деформируемого тела:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_m}{dt_X} = \vec{\mathbf{M}}_m. \tag{45}$$

Подставим $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}^0 + \vec{\mathbf{x}}$ (1) под знак интеграла в правых частях формул (43), (44) и, приняв во внимание, что $\vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{W}} = -\vec{\mathbf{X}}^0 \times \vec{\mathbf{w}}$, $\vec{\mathbf{W}}^0 = d\vec{\mathbf{X}}^0/dt_X$, а $\vec{\mathbf{w}} = d\vec{\mathbf{x}}/dt_X$, получим:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_m^0}{dt_X} + \frac{d\vec{\mathbf{l}}_m}{dt_X} = \vec{\mathbf{M}}_m^0 + \vec{\mathbf{m}}_m. \tag{46}$$

В формуле (46) введены следующие обозначения:

$$\vec{\mathbf{L}}_m^0 = \vec{\mathbf{X}}_m^0 \times M_m \vec{\mathbf{W}}_m^0, \tag{47}$$

$$\vec{\mathbf{l}}_m = \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\rho} \vec{\mathbf{W}} d\mathbf{V}, \tag{48}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_m^0 = \vec{\mathbf{X}}_m^0 \times \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{mn}, \tag{49}$$

$$\vec{\mathbf{m}}_m = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}}_m \times \vec{\mathbf{f}}_{mn}\, d\mathbf{V}. \tag{50}$$

Вектор $\vec{\mathbf{L}}_m^0$ (47) есть та часть полного момента импульса деформируемого тела, которая обусловлена движением центра масс тела относительно инерциальной системы координат $\{0, \vec{X}\}$. Вектор $\vec{\mathbf{L}}_m^0$ называется орбитальным моментом импульса. Вектор $\vec{\mathbf{l}}_m$ (48) есть та часть полного момента импульса деформируемого тела, которая обусловлена изменением положения точек материала деформируемого тела относительно своего мгновенного центра масс. Таким образом, вектор полного момента импульса деформируемого тела $\vec{\mathbf{L}}_m = \vec{\mathbf{L}}^0_m + \vec{\mathbf{l}}_m$.

Вектор $\vec{\mathbf{M}}^0_m$ (49) есть вектор главного момента внешних гравитационных сил относительно начала инерциальной системы координат $\{0, \vec{X}\}$. Вектор $\vec{\mathbf{m}}_m$ (50) есть вектор главного момента внешних гравитационных сил относительно мгновенного центра масс деформируемого тела. Таким образом, вектор полного момента внешних гравитационных сил $\vec{\mathbf{M}}_m = \vec{\mathbf{M}}^0_m + \vec{\mathbf{m}}_m$.

Для удаленных друг от друга тел из формул (39), (40), (49) и (50) с погрешностью $o\left(\mathbf{r}^3/R^3\right)$ получим:

$$\begin{gathered}\vec{\mathbf{M}}^0_m = \vec{\mathbf{X}}^0_m \times G \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \left(M_m \left(\frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} M_n - \right.\right. \\ - \frac{3}{2} \mathbf{I}_m \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n - 3\hat{\mathbf{I}}_m \bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n + \\ \left. + \frac{15}{2} \hat{\mathbf{I}}_m \bullet\bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7} M_n \right) - M_m \left(\frac{3}{2} \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} I_n M_n + \right. \\ \left.\left. + 3 \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} \bullet \hat{I}_n M_n - \frac{15}{2} \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7} \bullet\bullet \hat{I}_n M_n \right)\right),\end{gathered} \tag{51}$$

$$\vec{\mathbf{m}}_m = -3GM_m \hat{\mathbf{I}}_m \times\bullet \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n. \tag{52}$$

В уравнении (45) выделим в явном виде те величины, которые связаны с вращением деформируемого тела как целого.

Преобразуем второе слагаемое в левой части формулы (46). Из (21) следует: $\vec{\mathbf{w}} = \frac{d\vec{\mathbf{x}}}{dt_X} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathbf{d}t} + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}}$. Подставив эту формулу под знак интеграла (48), получим:

$$\frac{d\vec{\mathbf{l}}_m}{dt_X} = \frac{d}{dt_X} \int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\rho} \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathbf{d}t} d\mathbf{V} + \frac{d}{dt_X} \int\limits_{\mathbf{V}_m} \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}})\, d\mathbf{V}. \tag{53}$$

Поскольку $\vec{\mathbf{x}} \times (\vec{\mathbf{\Omega}} \times \vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{\Omega}} \bullet (|\vec{\mathbf{x}}|^2 \hat{1} - \vec{\mathbf{x}}\vec{\mathbf{x}})$, то второе слагаемое в правой части формулы (53)

$$\frac{d}{dt_X}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \boldsymbol{\rho}\vec{\mathbf{x}}\times(\vec{\boldsymbol{\Omega}}\times\vec{\mathbf{x}})\,d\mathbf{V} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_m \bullet \frac{d\hat{\mathbf{J}}_m}{dt_X} + \hat{\mathbf{J}}_m \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{\Omega}}_m}{dt_X} \tag{54}$$

есть изменение во времени вектора углового момента импульса деформируемого тела. Из формул (53) и (54) следует:

$$\frac{d\vec{\mathbf{I}}_m}{dt_X} = \frac{d}{dt_X}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}}\times\boldsymbol{\rho}\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathbf{d}t}d\mathbf{V} + \hat{\mathbf{J}}_m \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{\Omega}}_m}{dt_X} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_m \bullet \frac{d\hat{\mathbf{J}}_m}{dt_X}. \tag{55}$$

Формулы (53) – (55) позволяют записать уравнение (46) баланса полного момента импульса тела в виде:

$$\frac{d}{dt_X}(\vec{\mathbf{X}}^0_m \times M_m\vec{\mathbf{W}}^0_m) + \frac{d}{dt_X}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}}\times\boldsymbol{\rho}\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathbf{d}t}d\mathbf{V} +$$

$$+\hat{\mathbf{J}}_m \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{\Omega}}_m}{dt_X} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_m \bullet \frac{d\hat{\mathbf{J}}_m}{dt_X} = \vec{\mathbf{M}}^0_m + \vec{\mathbf{m}}_m. \tag{56}$$

Умножим $\vec{\mathbf{X}}^0_m$ векторно на обе части уравнения (36). Примем во внимание, что $\vec{\mathbf{X}}^0 \times M\frac{d\vec{\mathbf{W}}^0}{dt_X} = \frac{d}{dt_X}(\vec{\mathbf{X}}^0 \times M\vec{\mathbf{W}}^0)$. В результате получим уравнение изменения во времени вектора орбитального момента импульса деформируемого тела:

$$\frac{d}{dt_X}(\vec{\mathbf{X}}^0_m \times M_m\vec{\mathbf{W}}^0_m) = \vec{\mathbf{M}}^0_m. \tag{57}$$

Сравнив формулы (55) и (57), получим уравнение Лиувилля:

$$\frac{d}{dt_X}\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}}\times\boldsymbol{\rho}\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathbf{d}t}d\mathbf{V} + \hat{\mathbf{J}}_m \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{\Omega}}_m}{dt_X} + \vec{\boldsymbol{\Omega}}_m \bullet \frac{d\hat{\mathbf{J}}_m}{dt_X} = \vec{\mathbf{m}}_m. \tag{58}$$

Первое слагаемое в левой части уравнения (58) соответствует изменению в единицу времени собственно момента импульса деформируемого тела. Другие слагаемые в левой части этого уравнения соответствуют изменению в единицу времени углового момента деформируемого тела.

В инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$ уравнения (57) и (58) совместно определяют изменение во времени соответствующих частей полного вектора момента импульса деформируемого тела.

Уравнения (36) и (56) совместно определяют внешнюю задачу динамики массивного деформируемого тела – Земли.

Полная система уравнений движения отсчетного тела

Для отсчетного (недеформируемого) тела $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x}$, $d\vec{x}/dt = 0$, $\hat{\mathbf{I}} = \hat{I}$, $\hat{\mathbf{J}} = \hat{J}$, а $\vec{\mathbf{\Omega}} = \vec{\Omega}$.

Из формул (36) и (37) следует уравнение изменения во времени вектора импульса отсчетного тела:

$$M_m \frac{d^2 \vec{X}_m^0}{dt_X^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \vec{F}_{mn}, \tag{59}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{F}_{mn} = G\Bigg(M_m \Bigg(&\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^3} M_n - \frac{3}{2} I_m \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n - \\ &- 3\hat{I}_m \bullet \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n + \frac{15}{2} \hat{I}_m \bullet\bullet \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7} M_n \Bigg) - \\ &- M_m \Bigg(\frac{3}{2} \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} I_n M_n + 3 \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} \bullet \hat{I}_n M_n - \\ &- \frac{15}{2} \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7} \bullet\bullet \hat{I}_n M_n \Bigg)\Bigg).\end{aligned} \tag{60}$$

Из формулы (58) следует уравнение изменения во времени вектора углового момента импульса отсчетного тела:

$$\hat{J}_m \bullet \frac{d\vec{\Omega}_m}{dt_X} + \vec{\Omega}_m \bullet \frac{d\hat{J}_m}{dt_X} = \vec{m}_m, \tag{61}$$

где

$$\vec{m}_m = -3GM_m \hat{I}_m \times\bullet \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n. \tag{62}$$

Полученные уравнения движения отсчетного тела записаны в инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$. В этой системе координат компоненты тензора инерции $\hat{J}$ (или $\hat{I}$) отсчетного тела, вообще говоря, не являются постоянными величинами. Поэтому уравнение (63) целесообразно рассматривать в неинерциальной системе координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$, начало которой совпадает с центром масс отсчетного тела. В этой системе координат компоненты тензора инерции $\hat{J}$ (или $\hat{I}$) отсчетного тела являются постоянными величинами.

Найдем вид уравнения (61) в неинерциальной системе координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$. Из формулы (21) получим:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt_X} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}, \tag{63}$$

$$\frac{d\hat{J}}{dt_X} = \vec{\Omega} \times \hat{J}. \tag{64}$$

Подставим (63) и (64) в уравнение (61) и примем во внимание, что $\vec{\Omega} \bullet (\vec{\Omega} \times \hat{J}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \bullet \hat{J})$. В результате получим уравнение Эйлера [12,47], которое в неинерциальной системе координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$ определяет вращение недеформируемого тела относительно своего центра масс:

$$\hat{J}_m \bullet \frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \hat{J}_m) = \vec{m}_m, \tag{65}$$

правая часть уравнения (65) определяется формулой (62).

Рассмотрим, следуя В.А. Фоку [42], образуют ли приведенные выше соотношения полную систему уравнений движения отсчетного (недеформируемого) тела с номером m. Пусть известны: число взаимодействующих тел N, масса M_n $(n = 1, 2...N)$ каждого из тел и взаимные положения $\vec{R}^0_{mn}$ центров масс тел. Для тела с номером m неизвестными являются двенадцать величин: три компоненты $d^2\vec{X}^0/dt_X^2$ ускорения центра масс тела, три компоненты вектора $\vec{\Omega}$ угловой скорости вращения тела и шесть компонент тензора $\hat{J}$ (или $\hat{I}$) инерции тела. Все эти неизвестные величины можно найти из двенадцати уравнений (59), (64) и (65). Из изложенного следует, что уравнения движения недеформируемого (отсчетного) тела образуют полную систему и совместно определяют взаимосвязь орбитального и вращательного движений такого тела.

Внешняя задача динамики деформируемого тела

Уравнение (36) с правой частью (40) определяет движение центра масс деформируемого тела. Вычтем уравнение (59) из уравнения (36), в результате получим:

$$M_m \frac{d^2\vec{\mathbf{U}}^0_m}{dt_X^2} = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} (\vec{\mathbf{F}}_{mn} - \vec{F}_{mn}). \tag{66}$$

В левой части уравнения (66) $\vec{\mathbf{U}}^0 = \vec{\mathbf{X}}^0 - \vec{X}^0$ (3) есть та часть (возмущение) положения центра масс тела, которая обусловлена способностью материала тела деформироваться. В правой части уравнения (66):

$$\vec{\mathbf{F}}_{mn} - \vec{F}_{mn} = GM_m\biggl(-\frac{3}{2}\mathbf{i}_m\frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}M_n - $$
$$ - 3\,\hat{\mathbf{i}}_m\bullet\frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}M_n + \frac{15}{2}\,\hat{\mathbf{i}}_m\bullet\bullet\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7}M_n\biggr). \qquad (67)$$

Возмущение $\hat{\mathbf{i}}$ тензора инерции определяется формулой (32).

В инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$ уравнение (66) определяет изменение во времени той части (возмущения) орбитального движения центра масс тела, которая обусловлена способностью материала тела деформироваться.

В книгах К. Труcделла [45] и А.И. Лурье [49] отмечено, что действие одинаковых сил может привести к несовпадению положений центров масс движущихся деформируемого и недеформируемого тел одинаковой массы. Из формул (59), (60), (66) и (67) следует, что различие положений центров масс указанных тел определяется отношением $\mathbf{i}/I$.

Уравнение (58) определяет ориентацию в пространстве вращающегося деформируемого тела. Найдем вид уравнения (58) в неинерциальной системе координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$, в которой компоненты тензора инерции $\hat{J}$ (или $\hat{I}$) отсчетного тела являются постоянными величинами.

Примем во внимание формулы (5), (21) и неравенства (26). В результате в линейном по $\vec{\mathbf{u}}$ приближении получим:

$$\frac{d\vec{\mathbf{\Omega}}}{dt_X} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}, \qquad (68)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{J}}}{dt_X} = \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \vec{\Omega}\times\hat{\mathbf{j}} + \vec{\Omega}\times\hat{J} + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{J}. \qquad (69)$$

Вычтем (64) из (69). В результате получим:

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt_X} = \frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \vec{\Omega}\times\hat{\mathbf{j}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\hat{J}. \qquad (70)$$

Подставим формулы (4), (5) и (68) в уравнение (58). В результате в линейном по $\vec{\mathbf{u}}$ приближении получим:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m}\vec{x}\times\rho\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}dV + \vec{\Omega}_m\times\int\limits_{V_m}\vec{x}\times\rho\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}dV + \hat{\mathbf{j}}_m\bullet\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} +$$
$$+\vec{\Omega}_m\bullet\frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m\times(\vec{\Omega}_m\bullet\hat{\mathbf{j}}_m) + \hat{J}_m\bullet\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}_m}{dt} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_m\times(\vec{\Omega}_m\bullet\hat{J}_m) +$$
$$+\vec{\Omega}_m\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}_m\bullet\hat{J}_m) + \hat{J}_m\bullet\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m\times(\vec{\Omega}_m\bullet\hat{J}_m) = \vec{\mathbf{m}}_m. \qquad (71)$$

Вычтем (65) из (71). В результате получим:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_m}\vec{x}\times\rho\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}dV+\vec{\Omega}_m\times\int\limits_{V_m}\vec{x}\times\rho\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}dV+$$

$$+\hat{\mathbf{j}}_m\bullet\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt}+\vec{\Omega}_m\bullet\frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt}+\vec{\Omega}_m\times(\vec{\Omega}_m\bullet\hat{\mathbf{j}}_m)+$$

$$+\hat{J}_m\bullet\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}_m}{dt}+\vec{\boldsymbol{\omega}}_m\times(\vec{\Omega}_m\bullet\hat{J}_m)=\vec{\mathbf{m}}_m-\vec{m}_m. \tag{72}$$

Из формул (52) и (62) следует:

$$\vec{\mathbf{m}}_m-\vec{m}_m=-3GM_m\hat{\mathbf{i}}_m\times\bullet\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N}\frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5}M_n. \tag{73}$$

Левая часть уравнения (72) есть изменение во времени вектора момента импульса вращающегося деформируемого тела. Правая часть этого уравнения есть вектор главного момента внешних гравитационных сил относительно разности положений мгновенного центра масс деформируемого и отсчетного тел.

Уравнения (66), (70) и (72) определяют возмущения движений деформируемого тела как целого относительно движений отсчетного тела.

Сила собственной гравитации тела и реологическая модель его материала не входят в явном виде ни в одно из уравнений внешней задачи динамики деформируемого тела.

Пусть известны: число взаимодействующих тел N, масса M_n $(n=1,2...N)$ каждого из тел и взаимные положения $\vec{R}^0_{mn}$ центров масс тел. Пусть также известны все величины $d^2\vec{X}^0/dt^2_X$, $\vec{\Omega}$ и $\hat{J}$ (или $\hat{I}$), которые характеризуют движение отсчетного тела.

Дополнительно к перечисленным характеристикам отсчетного тела для деформируемого тела появляются пятнадцать неизвестных величин: три компоненты возмущения $d^2\vec{\mathbf{U}}^0/dt^2_X$ ускорения центра масс, три компоненты вектора $\int\limits_{V_m}\vec{x}\times\rho\frac{\partial\vec{\mathbf{u}}}{\partial t}dV$ собственно момента импульса материала тела, три компоненты $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ возмущения вектора угловой скорости и шесть компонент тензоров $\hat{\mathbf{j}}$ (или $\hat{\mathbf{i}}$). Все эти пятнадцать неизвестных величин нельзя определить из двенадцати уравнений (66), (70) и (72). Это значит, что уравнения внешней задачи динамики деформируемого тела не образуют полную систему.

В уравнениях (66), (70) и (72) вектор собственно момента импульса материала тела, возмущения вектора угловой скорости вращения тела и его тензора инерции зависят от вектора перемещений $\vec{\mathbf{u}}$. Это обстоятельство приводит к необходимости рассмотреть внутреннюю задачу динамики деформируемого тела.

Внутренняя задача динамики деформируемого тела

Подставим $\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{X}}^0 + \vec{\mathbf{x}}$ (1) в левую часть уравнения (18) и примем во внимание формулу (36). В результате получим:

$$\boldsymbol{\rho}_m \frac{d^2\vec{\mathbf{x}}_m}{dt_X^2} = \boldsymbol{\nabla} \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{\mathbf{f}}_{mm} + \vec{\mathbf{t}}_m, \tag{74}$$

где

$$\vec{\mathbf{t}}_m = \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} \left(\vec{\mathbf{f}}_{mn} - \frac{\boldsymbol{\rho}_m}{M_m}\vec{\mathbf{F}}_{mn}\right). \tag{75}$$

Нелинейное уравнение (74) определяет изменение во времени положения произвольной точки деформируемого тела в инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$.

В случае удаленных друг от друга шарообразных тел силы $\vec{\mathbf{f}}_{mn}$ и $\vec{\mathbf{F}}_{mn}$, соответственно, определяются формулами (39) и (40). Совместный анализ формул (39), (40) и (75) показывает, что сила $\vec{\mathbf{t}}_m$ зависит от взаимного положения всех тел и равна нулю только в центре масс ($\vec{\mathbf{x}}_m = 0$) тела $\mathbf{V}_m$. Следовательно, сила $\vec{\mathbf{t}}_m$ влияет на положение всех точек тела, кроме его центра масс, т.е. $\vec{\mathbf{t}}_m$ есть приливообразующая сила. С погрешностью $o\ (r^3/R^3)$ эта сила не зависит от тензоров инерции тех тел, которые удалены от рассматриваемого тела. Главный вектор приливообразующей силы относительно мгновенного центра масс деформируемого тела $\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{t}}_m \, d\mathbf{V} = 0$. Главный момент этой силы $\int\limits_{\mathbf{V}_m} \vec{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{t}}_m \, d\mathbf{V} = \vec{\mathbf{m}}_m$, где $\vec{\mathbf{m}}$ определяется формулой (50).

Подставим $\vec{\mathbf{x}} = \vec{x} + \vec{\mathbf{u}}$ (4) в обе части уравнения (74). В результате получим:

$$\boldsymbol{\rho}_m \frac{d^2\vec{\mathbf{u}}_m}{dt_X^2} = \boldsymbol{\nabla} \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{\mathbf{f}}_{mm} + \vec{\mathbf{t}}_m - \boldsymbol{\rho}_m \frac{d^2\vec{x}_m}{dt_X^2}. \tag{76}$$

Нелинейное уравнение (76) определяет изменение во времени вектора перемещений произвольной точки деформируемого тела в инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$.

Предположения (26) позволяют линеаризовать уравнение (76) и записать его в виде:

$$\rho_m \frac{\partial^2\vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t_X^2} = \nabla \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{f}_{mm} + \vec{t}_m - \rho_m \frac{d^2\vec{x}_m}{dt_X^2}. \tag{77}$$

В правой части уравнения (77) сила собственной гравитации тела и приливообразующая сила, соответственно, равны:

$$\vec{f}_{mm} = G\rho_m \int\limits_{V'_m} \rho' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}\, dV, \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
\vec{t}_m = G\rho_m \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{N} \Bigg(& \vec{x}_m \frac{1}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} M_n - 3\vec{x}_m \bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n - \\
& - \frac{3}{2}(\vec{x}_m \bullet \vec{x}_m - I_m)\frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n - 3(\vec{x}_m\,\vec{x}_m - \hat{I}_m) \bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n + \\
& + \frac{15}{2}(\vec{x}_m\,\vec{x}_m - \hat{I}_m) \bullet\bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7} M_n \Bigg).
\end{aligned} \tag{79}$$

Линейное уравнение (77) определяет изменение во времени вектора перемещений произвольной точки деформируемого тела в инерциальной системе координат $\{0, \vec{X}\}$.

Из формул (5) и (22) следует, что в неинерциальной системе координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$ уравнение (77) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} + 2\rho_m \vec{\Omega}_m \times \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t} + \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m) + \rho_m \frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \vec{\mathbf{u}}_m = \\
&= \nabla \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{f}_{mm} + \vec{t}_m - \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m) - \rho_m \frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \vec{x}_m.
\end{aligned} \tag{80}$$

В левой части уравнения (80) первое слагаемое есть собственно сила инерции элементарного объема деформируемого тела; второе, третье и четвертое слагаемые есть силы инерции, которые обусловлены влиянием вращения тела как целого на движение его элементарного объема. В правой части уравнения (80) первое слагаемое есть внутренняя поверхностная сила; второе и третье слагаемые есть, соответственно, внутреняя и внешняя гравитационные силы; четвертое и пятое слагаемые есть силы инерции, которые обусловлены вращением отсчетного тела.

В уравнениях (77) и (80) плотность материала тела и все действующие на это тело силы отнесены к отсчетному состоянию тела. В граничном условии (21) все величины также должны быть отнесены к отсчетному состоянию тела, т.е.

$$\hat{\sigma} \bullet \vec{n} = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{81}$$

Проинтегрируем уравнение (80) по объему V_m тела, а затем преобразуем его. Преобразования аналогичны тем, которые были сделаны при выводе уравнения (36). В результате в центре масс тела получим:

$$\partial^2 \vec{\mathbf{U}}^0 / \partial t^2 = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} = 0, \tag{82}$$

где $\vec{\mathbf{U}}^0 = \frac{1}{M} \int\limits_V \rho \vec{\mathbf{u}} dV$ есть вектор перемещений в центре масс тела. Из формулы (82) следует, что $\partial \vec{\mathbf{U}}^0 / \partial t = \text{const}$. Такое движение (так же как и покой) точек тела не вызывает в его материале деформаций. Поэтому без ограничения общности можно считать:

$$\vec{\mathbf{u}} = 0, \qquad \partial \vec{\mathbf{u}} / \partial t = 0 \qquad \text{при} \quad \vec{x} = 0. \tag{83}$$

Формулы (80), (81) и (83) определяют внутреннюю граничную задачу динамики массивного вращающегося деформируемого тела с номером m. Равенства (81) и (83) есть необходимые граничные условия для внутренней задачи динамики массивного вращающегося тела.

Пусть известны: число взаимодействующих тел N, взаимные положения $\vec{R}^0_{mn}$ центров масс тел, их массы M_n и тензоры инерции I_n $(n \neq m)$. Пусть также известно распределение плотности $\rho(\vec{x})$ в теле с номером m и реологическая модель его материала. В этом случае решение внутренней задачи динамики тела с номером m определяет вектор перемещений $\vec{\mathbf{u}}_m$ в любой точке этого тела. Если известен вектор $\vec{\mathbf{u}}_m$, то можно найти возмущения вектора угловой скорости вращения $\vec{\boldsymbol{\omega}}_m$ (29) тела как целого и его тензора инерции $\hat{\mathbf{i}}_m$ (или $\hat{\mathbf{j}}_m$) (32). Таким образом, уравнение (80) внутренней задачи является первичным объектом исследования влияния способности материала тела деформироваться на движения тела как целого.

Если тело вращается стационарно ($\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$), то уравнение (80) по своей структуре совпадает с уравнением, которое приведено в книге Лява [2]. На некотором удалении от центра масс тела (где $\mathbf{u}/x \ll 1$) силами инерции $\rho \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m)$ и $\rho \frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} \times \vec{\mathbf{u}}_m$ можно пренебречь.

Уравнения движения Земли

Данные наблюдений позволяют считать, что фигура Земли мало отличается от эллипсоида вращения, у которого $(r_e - r_p)/r_0 \ll 1$, где r_e, r_p и r_0 есть, соответственно, экваториальный, полярный и средний радиусы Земли. Из-за наличия рельефа поверхность реальной Земли не совпадает с поверхностью эллипсоида вращения. Максимальный перепад высот h рельефа Земли $h/r_0 \ll 1$. Каждая из величин $(r_e - r_p)/r_0$, h/r_0 и $\mathbf{u}/r_0$ удовлетворяет первому из неравенств (26). В силу этого $(r_e - r_p)$, h и $\mathbf{u}$ есть неразличимые величины. Поэтому допустимо считать, что отличие Земли от шара с радиусом r_0 определяется только способностью материала Земли деформироваться.

Примем простейщую модель Земли в отсчетном состоянии и каждого из взаимодействующих с ней тел.

Пусть в отсчетном состоянии все тела являются шарами, а распределение плотности в каждом из тел является центрально-симметричным:

$$\rho(\vec{x}) = \rho(|\vec{x}|). \tag{84}$$

В этом случае

$$\hat{J} = J\hat{1}, \quad \hat{I} = 0, \tag{85}$$

где J есть первый инвариант соответствующего тензора.

Формулы (84) и (85) определяют модель Земли в отсчетном состоянии и косвенно подтверждаются термодинамическим анализом состояния массивных вращающихся газообразных тел [50]. Эту модель назовем отсчетной Землей.

Подставим величины (85) в формулы (59), (60), (62), (64) и (65) и примем во внимание, что $\vec{\Omega} \times J\hat{1} = 0$. В результате для отсчетной Земли получим:

$$M_m \frac{d^2\vec{X}_m^0}{dt_X^2} = G \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{N} M_m \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^3} M_n, \tag{86}$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} = \frac{d\vec{\Omega}_m}{dt_X} = 0, \tag{87}$$

$$\frac{dJ_m}{dt_X} = 0. \tag{88}$$

Уравнение (86) определяет орбитальное движение центра масс отсчетной Земли, которое совпадает с движением материальной точки массой M_m. Формулы (87) и (88) показывают, что ориентация отсчетной Земли не изменяется относительно инерциальной системы координат $\{0, \vec{X}\}$.

Подставив (84), (85) и (87) в формулу (80), получим уравнение внутренней задачи динамики принятой модели Земли:

$$\begin{aligned} &\rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} + 2\rho_m \vec{\Omega}_m \times \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t} + \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m) = \\ &= \nabla \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{f}_{mm} + \vec{t}_m - \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m), \end{aligned} \tag{89}$$

где $\vec{f}_{mm}$ определяется формулой (78), а приливообразующая сила (79) равна:

$$\vec{t}_m = G\rho_m \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \left(\vec{x}_m \frac{1}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} M_n - 3\vec{x}_m \bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n - \right.$$

$$- \frac{3}{2}(\vec{x}_m \bullet \vec{x}_m) \frac{1}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n - 3(\vec{x}_m\, \vec{x}_m) \bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n +$$

$$\left. + \frac{15}{2}(\vec{x}_m\, \vec{x}_m) \bullet\bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7} M_n \right). \qquad (90)$$

Граничные условия для внутренней задачи динамики Земли определяются формулами (81) и (83).

Из формул (90), (36), (40) и (85) получим уравнение движения центра масс Земли:

$$M_m \frac{d^2\vec{\mathbf{X}}^0_m}{dt_X^2} = G \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \left(M_m \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^3} M_n + M_m \left(- \frac{3}{2}\mathbf{i}_m \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 3\,\hat{\mathbf{i}}_m \bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n + \frac{15}{2}\,\hat{\mathbf{i}}_m \bullet\bullet \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^7} M_n \right)\right). \qquad (91)$$

Из (91) следует, что отличие движения центра масс Земли от движения материальной точки определяется только способностью материала Земли деформироваться.

Подставим формулы (85), (87) в формулы (70), (71) и примем во внимание, что $\vec{\Omega} \times J\hat{1} = 0$ и $\vec{\omega} \times J\hat{1} = 0$. В результате получим уравнения, которые определяют вращение Земли относительно ее центра масс:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V_m} \vec{x} \times \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} dV + \vec{\Omega}_m \times \int\limits_{V_m} \vec{x} \times \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} dV + \vec{\Omega}_m \bullet \frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt} +$$

$$+ \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \hat{\mathbf{j}}_m) + J_m \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}_m}{dt} = -3GM_m \hat{\mathbf{i}}_m \times\bullet \sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{N} \frac{\vec{R}^0_{mn}\vec{R}^0_{mn}}{|\vec{R}^0_{mn}|^5} M_n, \qquad (92)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt_X} = \frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m \times \hat{\mathbf{j}}_m. \qquad (93)$$

Уравнения (89), (91) и (92) совместно определяют мгновенное состояние деформируемой Земли. Это состояние реализуется вследствие равномерного вращения отсчётной Земли.

Полученные уравнения движения Земли содержат, вообще говоря, неопределенные величины $J_m = \text{const}$ и $\vec{\Omega}_m = \text{const}$. Рассмотрим принципиальную возможность определения этих величин.

В формуле (29) преобразуем интеграл по объему Земли V_m в интеграл по ее дневной поверхности S_m [44]:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}_m = -\frac{1}{2}\frac{1}{V}\int\limits_{S_m}\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t}\times\vec{n}ds. \tag{94}$$

Поскольку S_m, $\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t}$ и $\vec{n}$ есть, в принципе, измеряемые величины, то формула (94) позволяет считать вектор $\vec{\boldsymbol{\omega}}_m$ измеряемой величиной. Из измерений известно, что абсолютная величина и направление вектора угловой скорости вращения Земли незначительно изменяются относительно некоторых средних значений [3, 7, 12, 51]. Эти изменения таковы, что правдоподобно выполнение следующего условия: $< \vec{\boldsymbol{\omega}}_m >_{\Delta t} = 0$. (Символ $< >_{\Delta t}$ означает среднее по интервалу времени Δt значение соотвествующей величины.) Из этого условия и формулы (8) следует: $\vec{\Omega}_m =< \vec{\boldsymbol{\Omega}}_m >_{\Delta t} = \text{const}$. Пусть известно решение внутренней задачи динамики Земли. В этом случае величина J_m, в принципе, может быть найдена из уравнения (92).

Таким образом, момент инерции J_m и угловую скорость $\vec{\Omega}_m$ вращения отсчетной Земли можно считать определенными величинами, а отсчетное состояние Земли можно рассматривать как физически реализуемое. Интервал времени Δt должен быть не меньше периода оборота Земли вокруг Солнца (1 год) и не больше периода прецессии плоскости орбиты Земли (26000 лет). По-видимому, в течение такого интервала времени реализуются все возможные состояния материала принятой модели Земли.

Полученные выше уравнения динамики массивного деформируемого тела (Земли) справедливы при тех движениях ее материала, максимальная скорость изменения которых меньше скорости сейсмических волн. Этому условию удовлетворяют все возможные движения Земли.

Уравнения динамики Земли можно существенно упростить в случаях очень быстрых и очень медленных движений материала Земли. В этих случаях период вращения Земли T, соответственно, много больше или много меньше характерного времени изменения вектора перемещений ее материала Δt.

Баланс энергии в принятой модели Земли рассмотрен в работе автора [52].

Основные результаты и выводы

Реализована идея применения метода моментов для вывода согласованной системы уравнений движения массивного вращающегося деформируемого тела (Земли). Это тело взаимодействует с другими аналогичными телами в соответствии с законом тяготения.

В отсчетном состоянии Земля является массивным недеформируемым стационарно вращающимся шаром с центрально симметричным распределением плотности. В мгновенном состоянии в материале Земли реализуются малые перемещения, дисторсии, медленное изменение перемещений и симметричный тензор напряжений. Поверхность Земли незагружена. Получена система уравнений внешней и внутренней задач динамики принятой модели Земли.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. Движения Земли можно представить как совокупность движений отсчетной (недеформируемой) Земли и тех движений, которые обусловлены способностью материала Земли деформироваться.

2. Уравнение внешней задачи динамики Земли определяют движение центра масс Земли и ее вращение как целого относительно своего центра масс. Уравнение внутренней задачи динамики Земли определяет взаимное движение точек ее материала. Это уравнение является первичным объектом исследования влияния способности материала Земли деформироваться на ее движения как целого.

3. Уравнения внутренней и внешней задач динамики Земли полностью согласованы друг с другом, так как все величины в этих уравнениях определены относительно одинакового отсчетного состояния. Это состояние можно считать физически реализуемым.

4. При пренебрежении способностью материала Земли деформироваться полученные уравнения определяют движения Земли как недеформируемого тела. Если Земля и взаимодействующие с ней тела очень удалены друг от друга, то эти же уравнения определяют движение Земли как материальной точки.

Автор благодарен В.И. Осауленко за обсуждение работы и критические замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-05-64320 РФФИ) и Международного научно-технического центра (проект N 1538 МНТЦ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смарт У.М.* Небесная механика. М.: Мир, 1965. 504 с.
2. *Love A.E.H.* Some problems of geodynamics. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1911. 180 p.
3. *Мунк В., Макдонал Г.* Вращение Земли: геофизические приложения. М.: Мир, 1960. 323 с.
4. *Мельхиор П.* Земные приливы. М.: Мир, 1968. 482 с.
5. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. М.: Мир, 1975. Т.1. 576 с; 1976. Т.2. 483 с.
6. *Буллен К.Е.* Плотность Земли. М.: Мир, 1978. 442 с.
7. *Lambeck K.* Earth's variable rotation. Cambridge: Cambridge. Univ. Press., 1980. 449 p.
8. *Ben-Menahem A., Singh S.* Seismic waves and sources. N-Y, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1981. 1108 p.
9. *Монин А.С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
10. *Молоденский М.С.* Общая теория упругих колебаний Земли. М.: Недра, 1989. 80 с.
11. *Moritz H.* The figure of the Earth: theoretical geodesy and the Earth's interior. Karlsruhe: Wichmann, 1990. 279 p.
12. *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев: Наукова думка, 1992. 512 с.
13. *Dahlen E.A.* Theoretical global seismology. Prinston: Prinston Univ. Press, 1998. 1025 p.
14. *Bursa M., Kostelecky J.* Space geodesy and space geodynamics. Prague: Pabl. Ministry of defence Czech. Repabl.,1999. 460 p.
15. *Моисеев. Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
16. *Магнус К.* Гироскоп: теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
17. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд. МГУ, 1975. 308 с.
18. *Зоммерфельд А.* Механика. М.: И.-Л., 1947. 391 с.
19. *Вуллард Э.* Теория вращения Земли около центра масс. М.: Физматгиз, 1963. 167 с.
20. *Vicente R.O.* The theory of nutation and the internal constitution of the Earth // Phys. and Chem. of the Earth. 1961. Vol.4. P.251–280.
21. *Smith M.* Wobble and nutation of the Earth // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1977. Vol.50. P.103–140.
22. *Kinoshita H.* Theory of the rotation of the rigid Earth // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1977. Vol.15. P.277–326.
23. *Kinoshita H., Souchay J.* The theory of the nutation for the rigid Earth. Model at the second order // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1990. Vol.48. P.187–265.
24. *Souchay J., Kinoshita H.* Correction and new developments in the rigid Earth nutation theory. 1. Lunisolar influence including indirect planetary effects // Astron. and Astrophys. 1966. Vol.312. P.1017– 1030.
25. *Souchay J., Kinoshita H.* Correction and new developments in the rigid Earth nutation theory. 2. Influence of second- order geopotential and indirect planetary effects // Astron. and Astrophys. 1997. Vol.318. P.639–652.

26. *Souchay J., Laysel B., Kinoshita H., Folgueira M.* Correction and new developments in the rigid Earth nutation theory. 3. Final tables 'REN-2000' including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects // Astron. and Astrophys. Suppl. 1999. Vol.135. P.111–131.
27. *Wahr J.M.* The Earth's rotation // Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 1988. Vol.16. P.747–765.
28. *Hinderer J., Legros H., Amalvict M.* A search for Chandler and nearly diurnal free wobbles using Liouville equations // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1982. Vol.71. P.121–132.
29. *Mathews P.M., Buffet B.A., Herring T.A., Shapiro I.I.* Forced nutations of the Earth: influence of inner core dynamics. 1. Theory // J. Geophys. Res. 1991. Vol.96. P.8219–8242.
30. *Mathews P.M., Buffet B.A., Herring T.A., Shapiro I.I.* Forced nutation of the Earth. 2. Numerical resalts and comparisons // J. Geophys. Res. 1991. Vol.96. P.8243–8257.
31. *Herring N.A., Buffet B.A., Mathews P.M., Shapiro I.I.* Forced nutation of the Earth. 3. Very long interferometry data analyaia // J. Geophys. Res. 1991. Vol.96. P.8259–8273.
32. *Buffet B.A., Mathews P.M., Herring N.A., Shapiro I.I.* Forced nutation of the Earth: contributions from the effect of ellipticity and rotation on the elastic deformation // J. Geophys. Res. 1993. Vol.98. P.21659– 21676.
33. *Getino J., Ferrandiz J.* A Hamiltonian theory for an elastic Earth: canonical variables and kinetic energy // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1990. Vol.49. P.303–326.
34. *Getino J., Ferrandiz J.* A Hamiltonian theory for an elastic Earth: energy of deformation // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1991. Vol.51. P.17–34.
35. *Getino J., Ferrandiz J.* A Hamiltonian theory for an elastic Earth: first order analytical integration // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1991. Vol.51. P.35–65.
36. *Getino J.* Elastic energy of deformable Earth: general expression // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1992. Vol.53. P.11–36.
37. *Getino J., Ferrandiz J.* A rigorous Hamiltonian formalism to the rotation of elastic bodies // Celest. Mech. Dynamical Astron. 1994. Vol.58. P.277–295.
38. *Молоденский С.М., Сосао Т.* Об одном новом подходе к теории нутации Земли. 1. Основные уравнения // Изв. РАН. Физика Земли. 1995. N 12. С.24–38.
39. *Молоденский С.М., Сосао Т.* Об одном новом подходе к теории нутации Земли. 2. Численные результаты // Изв. РАН. Физика Земли. 1995. N 12. С.39–47.
40. *Molodensky S.M., Groten E.* On the dynamical effects of an inhomogeneous liquid core in the theory of nutation // J. Geodesy. 1998. Vol.72. P.385–403.
41. *Молоденский С.М.* О вынужденной нутации Земли // Изв. РАН. Физики Земли. 2000. N 9. С.65–79.
42. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд. тех.-теор. лит, 1955. 504 с.
43. *Воевода О.Д.* Об уравнениях движения Земли // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности. М.: ГЕОС, 2001. С.278–296. (Вычисл. сейсмология; Вып.32).
44. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред // М.: Мир, 1974. 318 с.
45. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред // М.: Мир, 1975. 592 с.
46. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 1. Общие вопросы. Киев: Наукова думка, 1986. 374 с.
47. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. (Т.1. Механика). М.: Физматлит, 2001. 223 с.

48. *Зиглина И.Н.* Приливное разрушение тел вблизи планеты // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. N 7. С.3–10.
49. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
50. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. (Т.5. Статистическая физика). М.: Физматлит, 2001. 616 с.
51. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистистический подход. М.: Наука, 1989. 304 с.
52. *Воевода О.Д.* Об уравнениях движения Земли. II. Средние напряжения и баланс энергии // Проблемы теоретической сейсмологии и сейсмичности. М.: ГЕОС, 2002. С.293–310. (Вычисл. сейсмология; Вып.33).